EXPERIMENTELLE DIFFERENZIALGEOMETRIE

Zweispurige Kurven

Mit dem chinesischen Kompasswagen oder anderen zweispurigen Fahrzeugen kann man die innere Geometrie gekrümmter Flächen »erfahren«.

Von Norbert Treitz

Die Chinesen haben nicht nur den sehr nützlichen Magnetkompass lange vor den Europäern erfunden; es gibt aus ihrem Land auch einen transportablen Richtungszeiger, der nichts mit dem Magnetfeld und auch nichts mit der Drehung der Erde zu tun hat. Er wurde mehrmals in den letzten Jahrtausenden erfunden und bewahrte selbst bei Nebel die Orientierung bei kriegerischen Operationen.

Der Kompasswagen ist im Wesentlichen ein Karren mit zwei gleich großen, einzeln drehbaren Rädern auf einer gemeinsamen Achse sowie einem Stützrad an einer Deichsel, damit das ganze Ding nicht umfällt. Die Räder wirken über Zahnräder auf eine aufrecht stehende Achse. Ein an dieser montierter Zeiger weist stets in die gleiche Himmelsrichtung, auch wenn der Wagen auf kurvigen Wegen geschoben wird (Kasten unten) – vorausgesetzt, der Weg liegt in der Ebene, und die Räder rollen ab, ohne zu gleiten.

Die Zahnräder wirken so, dass der Zeiger beim Geradeausfahren nicht gedreht wird, aber seine Drehung relativ zum Wagen genau die Drehung des Wagens relativ zum Erdboden aufhebt, wenn der Wagen eine Kurve fährt oder auf der Stelle gedreht wird. Das Getriebe errechnet gewissermaßen die Differenz zwischen den Wegen beider Räder und setzt sie in die Zeigerstellung um. Das kann auf verschiedene Weisen realisiert werden (Kasten unten und Bild rechts oben).

Ist der Wagen deutlich kleiner als ein Globus, eine Schultüte oder eine Vase, so kann man die »innere Geometrie« von deren Oberflächen erkunden, indem man den Wagen einen geschlossenen Weg führt derart, dass er am Ende dieselbe Ausrichtung hat wie am Anfang, und die resultierende Zeigerdrehung auswertet. Dabei spielt die tatsächliche Einbettung der Fläche in den Raum keine Rolle, was besonders bei der abwickelbaren Kegeloberfläche interessant ist.

Für das Folgende genügt es, sich einen sehr einfachen Karren zu denken, der an jedem seiner beiden Räder einen (sehr präzisen) Kilometerzähler trägt. Den Mittelwert der abgerollten Umfänge nennen wir »Weglänge«, und aus der Differenz der Drehwinkel bestimmen wir anhand des Verhältnisses aus Radius und Achslänge die »Abbiegesumme«. Dabei zählen wir eine volle Umdrehung Vorsprung des rechten Rads als $+2\pi$ oder, was dasselbe ist, 360 Grad.

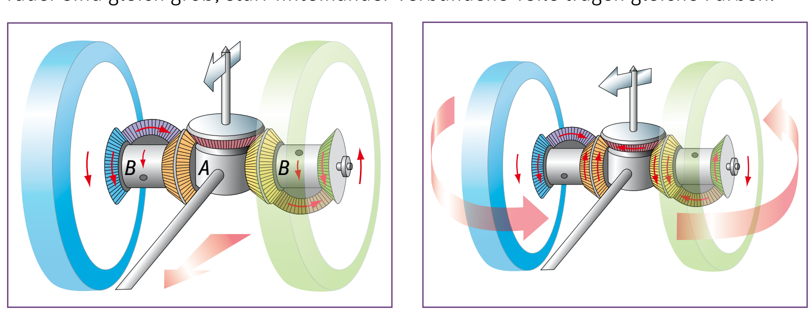
Ein Wegstück, auf dem sich beide Räder genau gleich oft drehen, nennen wir nicht »gerade«, weil das auf einer gekrümmten Oberfläche irgendwie unpas-

SHOJI ISHIDA

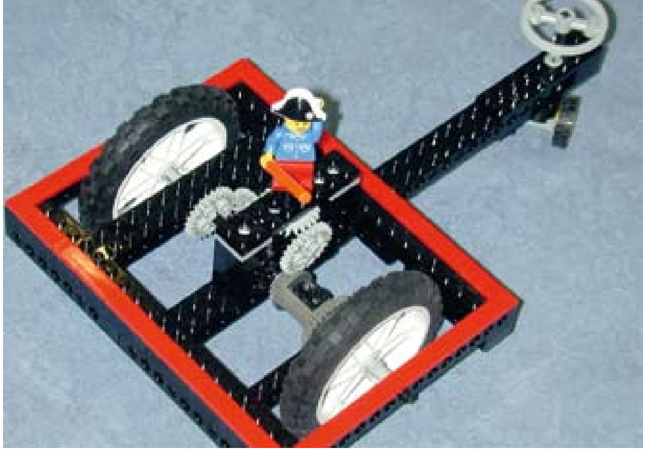
Getriebe eines Kompasswagens

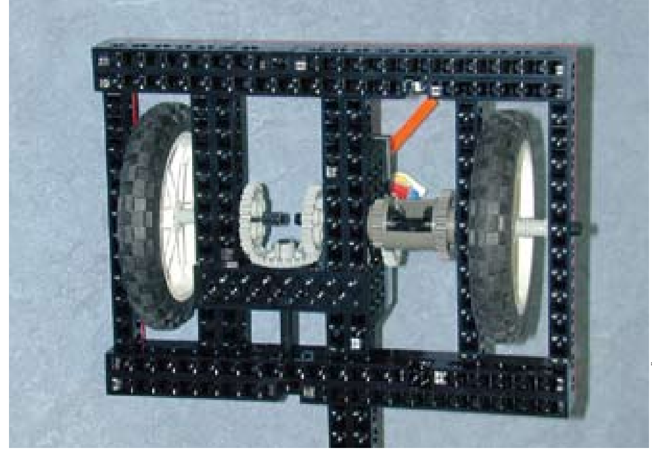
Aus antiker Zeit ist kein chinesischer Kompasswagen erhalten. Überlieferte Dokumente lassen viel Interpretationsspielraum. Die links abgebildete Rekonstruktion stammt von dem Japaner Shoji Ishida. Das Schema unten basiert auf dem Differenzialgetriebe, das in jedem Auto zwei Räder zugleich antreibt und ihnen dennoch die Freiheit lässt, in Kurven verschieden lange Wege zurückzulegen.

Der Abstand der beiden Laufräder ist gleich ihrem Durchmesser. Block *A* hängt an der Deichsel und wird von dieser in seiner Position gehalten. Die beiden Blöcke *B* sind über eine Achse starr miteinander verbunden und rotieren beim Geradeauslauf (linkes Bild) mit der halben Winkelgeschwindigkeit der Räder (Pfeile kennzeichnen die Winkelgeschwindigkeit). Dreht sich der Wagen auf der Stelle (rechtes Bild), bleiben die Blöcke *B* relativ zum Wagen in Ruhe, während alle Zahnräder rotieren. Alle Kegelzahnräder sind gleich groß; starr miteinander verbundene Teile tragen gleiche Farben.



SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT / MARTINA BUSKE





BEIDE MODELLE: JÜRGEN RICHTER-GEBERT

Diesen Kompasswagen hat Jürgen Richter-Gebert von der Technischen Universität München aus Legoteilen gebaut. Der Blick von unten (rechts) zeigt: Die Bewegung des linken Rads wird durch die drei rechtwinklig zueinander stehenden Zahnräder links mit einem negativen Vorzeichen versehen. Das Differenzialgetriebe rechts addiert die Bewegung des rechten und minus die Bewegung des linken Rads zur Bewegung des Zeigers.

send wäre, sondern »geodätisch«, wie es in der Differenzialgeometrie üblich ist. Einen geodätischen Weg kann man auch recht elegant mit einem halb starren (abwickelbaren, aber nicht wölbbaren) Klebestreifen realisieren, vor allem wenn er beim Abreißen keine bleibenden Schäden auf der Oberfläche hinterlässt. An einer Ecke drehen sich beide Räder gleich weit gegeneinander, dabei dreht sich der Karren auf der Stelle um den entsprechenden Abbiegewinkel, und zwar um eine Achse, die rechtwinklig auf der befahrenen Fläche steht.

Einen Weg, auf dem sich geodätische Wegstücke und Ecken abwechseln und an dessen Ende der Karren wieder am Start steht und in die gleiche Richtung weist, nennen wir ein Polygon. Wenn es sich nicht selbst überkreuzt wie zum Beispiel ein Fünfstern oder eine Achtkurve, soll das Polygon »einfach« heißen.

In der euklidischen Ebene

Für die Grobgestalt eines Wegs in der Ebene ist die Abbiegesumme viel aussagekräftiger als die klassische Winkelsumme. So hat jedes einfache Polygon in der Ebene die Abbiegesumme 2π, aber die Summe der Innenwinkel $(n-2)\pi$ hängt von der Eckenzahl n ab. Für einen Weg mit krummen Seiten wie etwa das nach Franz Reuleaux (1829–1905) benannte gleichdicke Bogendreieck (Bild unten, links) bleibt die Abbiegesumme 2π, verteilt zu je einem Sechstel auf die drei Ecken und die drei Bögen, während die Innenwinkelsumme auf 2π anwächst.

Nähert man einen Kreis durch Polygone mit immer mehr Seiten an, so strebt die Innenwinkelsumme dieser Polygone gegen unendlich, aber die Abbiegesumme bleibt 2π. Wohlgemerkt: Dieser in die Ebene eingebettete Kreis ist etwas anderes als ein Kreis um einen Zylinder oder einen Kegel! Der liegt zwar auch in einer Ebene, nicht aber seine unmittelbare Umgebung. Daran würde der Karren »merken«, dass er nicht in einer Ebene rollt.

Die Abbiegesumme kümmert sich nicht um Einzelheiten der Gestalt, sondern um die Anzahl der vollen Umdrehungen, die der Wagen bis zur Rückkehr an den Ausgangspunkt vollführt. Für ein Sternpolygon wie das Pentagramm (Bild unten, Mitte) ist diese Anzahl 2 und die Abbiegesumme entsprechend 4π. Allgemein seien n und m zwei teilerfremde natürliche Zahlen, n größer als 4, m größer als 1. Wir biegen n-mal um je $2(m/n)\pi$ nach links ab und fahren zwischendurch immer wieder dieselbe Strecke geradeaus. Dann erhalten wir ein reguläres Sternpolygon (ein »n/m-Eck«) mit der Innenwinkelsumme $n(\pi-2\pi m/n)$ und – unabhängig von n – der Abbiegesumme $2m\pi$.

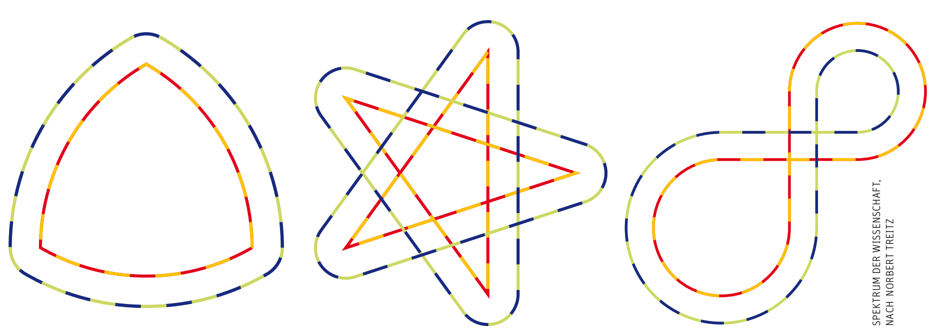
Oder man vollführt eine Runde plus eine negative Runde und landet bei der Abbiegesumme null. Der Gesamtweg sieht dann mehr oder weniger aus wie die Ziffer 8 (Bild unten, rechts).

Auf dem Kegelmantel

Wir schneiden aus einer Ebene einen Kreissektor mit unendlichem Radius, aber definiertem Zentriwinkel s aus und kleben ihn zu einem Kegelmantel zusammen. Durch diese Aktion ändert sich für unseren Karren, der ja die Geometrie in der Fläche unabhängig von ihrer Einbettung im Raum erkundet, zunächst gar nichts. Es interessiert ihn auch nicht, ob der Kegel einen schönen kreisförmigen Querschnitt hat oder irgendwie (knickfrei) deformiert ist. Für s größer als 2π (was nur mit mehr als einem Stück Papier herzustellen ist) klappt das Biegen zum geraden Kreiskegel ohnehin nicht mehr, stattdessen muss die Fläche gewellt oder gekräuselt werden wie – im Extremfall – ein barocker Mühlsteinkragen.

Was auf dem ebenen Papier eine gerade Linie war, ist auf dem Kegel immer noch eine Geodäte. Ein Kreisbogen mit Radius y und Zentriwinkel s wird durch das Zusammenkleben zu einem Rundweg mit der Abbiegesumme s.

Wir haben nun zweierlei Polygone. Je nachdem, ob sie die Kegelspitze um-



SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT, NACH NORBERT TREITZ

Die Wegdifferenz beider Räder entspricht auch beim Reuleaux-Bogendreieck in der Ebene einem Umlauf, beim 5/2-Sternpolygon (Pentagramm) zwei Umläufen. Bei der ebenen Acht-Kurve laufen beide Räder gleich lange Wege. Der Übersichtlichkeit zuliebe läuft eins der Räder (rot-gelbe Spur) die exakte Kurve und das andere nebenher.

runden oder nicht, haben sie s oder 2π als Abbiegesumme. Etwas klarer kann man sie daran unterscheiden, ob sie die Naht oder eine andere zuvor markierte bestimmte Mantellinie *per saldo* genau einmal kreuzen oder nicht; Kreuzen in verschiedenen Orientierungen zählt mit verschiedenen Vorzeichen.

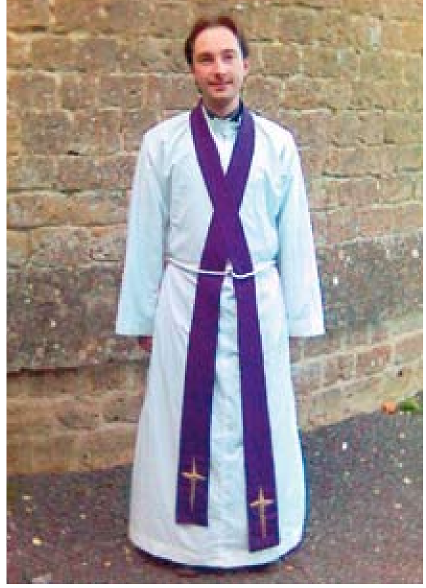
Was ist nun eine geodätische Linie auf dem Kegelmantel? Zum Beispiel eine Stola (Bild rechts), also ein Schal, der gerollt, aber nicht gewölbt werden kann. Einem Kegel passt sie mindestens so gut um den Hals wie einem Menschen. Man kann das mit Klebeband auf einem Styroporkegel oder einer Schultüte probieren oder noch besser mit gezeichneten Geraden auf Klarsichtfolie, die man sogar mit frei wählbarem Sektorwinkel zum Kegelmantel rollen kann.

Beim Sektorwinkel π laufen die Enden der Stola immer genauer parallel zueinander ins Unendliche, bei kleineren Sektorwinkeln kreuzen sie sich mindestens einmal, bei sehr kleinen entsprechend öfter. Das Stück vom Nacken bis zum ersten Kreuzungspunkt ist gewissermaßen ein Kegel-Eineck, denn es hat eine einzige Ecke und »dazwischen« eine einzige geodätische Seite. Die Ebene hat so etwas Interessantes nicht zu bieten, und die Kugel auch nicht!

Auf der Kugel

Die einzigen geodätischen Linien auf der Kugeloberfläche sind Kreise um den Kugelmittelpunkt, die »Großkreise«. Man kann auf ihnen ohne Abbiegungen eine komplette Runde fahren, genau so wie auf einem Zylinder rund um dessen Achse. Die Bezeichnung »Null-Eck« passt in diesen beiden Fällen sehr gut: Der Weg ist geschlossen, hat keine Ecken und ist – im Gegensatz zum Kreis auf der Ebene – geodätisch, und zwar überall. Der Kreis auf der Ebene ist in diesem Sinn eher ein reguläres »Unendlich-Eck«.

Kugelpolygone haben also Stücke von Großkreisen als Seiten. Die Winkelsumme im Kugelpolygon ist stets größer als die in seinem ebenen Gegenstück, und die Abbiegesumme ist entsprechend kleiner. Das fängt beim Null-Eck an: Für einen beliebigen Großkreis ist die Abbiegesumme 0 (statt 2π), und wenn wir ihn als reguläres n-Eck auffassen, also künstliche Eckpunkte mit dem Winkel $\pi = 180$ Grad einfügen, bekommen wir die Innenwinkelsumme $n\pi$, also um 2π zu viel, aber immer noch die Abbiegesumme 0.



GARETH HUGHES

Kegeleineck auf einem – nur in sehr grober Näherung – kegelförmigen Menschen

Für ein Kugelzweieck, bestehend aus zwei halben Großkreisen und zwei Ecken mit Innenwinkeln der Größe z dazwischen, ist die Abbiegesumme $2\pi-2z$, die Innenwinkelsumme $2z$ und die Fläche $2zR^2$, wobei R der Kugelradius ist.

Als einfaches Beispiel für ein Kugeldreieck nehmen wir eines mit drei rechten Winkeln. Auf einer idealisierten Erde wählen wir – zu Ehren von Alexander von Humboldt und Albert Schweitzer – als seine Eckpunkte den Nordpol, den Chimborazo und Lambarene. Unser Dreieck hat (fast genau) drei gleiche Seiten, nämlich je 1/4 des Erdumfangs, umfasst 1/8 der Erdoberfläche, also $\pi R^2/2$, hat die Innenwinkelsumme $3\pi/2$ ($\pi/2$ mehr als das ebene Dreieck) und die Abbiegesumme $3\pi/2$ ($\pi/2$ weniger als in der Ebene).

Allgemein ist für jedes Kugelpolygon die Innenwinkelsumme um $E = A/R^2$ größer als in seinem ebenen Gegenstück, wobei A der Inhalt der (gewölbten) Fläche des Kugeldreiecks ist. Für die Abbiegesumme eines beliebigen Kugelpolygons folgt daraus die erstaunlich einfache Aussage, dass sie um E kleiner ist als 2π. Dieses E hört auf den viel versprechenden Namen »sphärischer Exzess«. Für kleine Flächen (und entsprechend kleine Werte von E) haben wir fast keinen Unterschied zur Ebene.

Ein Breitenkreis liegt in einer Ebene parallel zum Äquator; diese geht also – mit Ausnahme der Äquatorebene selbst – nicht durch den Erdmittelpunkt. Ein Kompasswagen, der zum Beispiel einen nördlichen Breitenkreis westwärts vollständig durchläuft, muss ständig ein bisschen rechts abbiegen, in der Nähe des Nordpols nicht nur ein bisschen. Auch für diesen Weg gilt $E = A/R^2$, und die Abbiegesumme ist $2\pi - E$. Diesmal ist A die Fläche der Kugelkappe, die der Breitenkreis abschneidet. Das lässt sich zeigen, indem man der Kugel einen kegelförmigen Hut mit passendem Sektorwinkel aufsetzt, der ihr auf dem Breitengrad perfekt (tangential) anliegt. Entsprechendes gilt für alle Kreise auf der Kugel.

Von den Vereinigten Staaten von Amerika sehen (auf bestimmten Karten) zwei perfekt rechteckig aus: Colorado liegt zwischen 37 und 41 Grad nördlicher Breite und zwischen 25 und 32 Grad westlicher Länge, Wyoming zwischen 41 und 45 Grad nördlicher Breite und zwischen 27 und 34 Grad westlicher Länge, bezogen auf den Meridian, der durch das Old Naval Observatory in Washington verläuft und in den 1860er Jahren, als die Staatsgrenzen gezogen wurden, der offizielle Bezugsmeridian war.

Sind sie nun Kugelrechtecke? Nicht wirklich. Die vier Winkel sind genau rechte, aber die Nord- und Südgrenzen sind keine geodätischen Linien. Würde man sie durch Großkreisbögen ersetzen, so würden die Winkel in den nördlichen Ecken etwas vergrößert und die südlichen etwas weniger verkleinert. Wenn man also einen sehr präzisen Karren hätte und eins der beiden Bundesländer umfahren würde, könnte man feststellen, dass es fast genau 1/2000 der Erdoberfläche umfasst, ohne dass man deren Wert dazu wissen müsste. Obwohl beide auf einer Plattkarte wegen gleicher Längen- und Breitendifferenzen gleich groß gezeichnet werden, ist das nördlichere Wyoming etwas kleiner als das südlichere Colorado. Auf der Mercatorkarte, deren Maßstab bekanntlich zu den Polen hin jeden endlichen Wert überschreitet, sieht es sogar umgekehrt aus! ◁

Norbert Treitz ist apl. Professor für Didaktik der Physik an der Universität Duisburg-Essen. Seine Vorliebe für erstaunliche Versuche und Basteleien sowie für anschauliche Erklärungen dazu nutzt er auch zur Förderung hoch begabter Kinder und Jugendlicher.

Liebscher, D.-E.: Mit dem Kompasswagen über den Globus. In: MNU 52, S. 140 – 144, 1999.

Weblinks zu diesem Thema finden Sie unter www.spektrum.de/artikel/964144.