

Mechanism Design of South Pointing Chariots

Professor Ying-Chien Tsai, et al.

First published in

Mechanical Engineering No. 154, pp. 18-24

Chinese Society of Mechanical Engineering (CSME),
Taiwan 1986

指南車機構設計

* 楊衍宗 * 戴瑞庸 * 劉長壽 * 林啓基 ** 蔡穎堅

摘要

指南車為一利用左右車輪差動補償機構，以達到車上一定向軸之方向維持固定不變，為一中國古代之偉大發明。如今利用現代機構原理為基礎，設計出數種可能之指南車新機構，並利用拆船舊零件製作模型以驗證之。

一、引言

「指南車」是一種用來指示方向的工具，相傳它在新石器時代「涿鹿大戰」時，就為黃帝所屬發明，但這只是一項傳說，正史上並無明確記載；而另一種傳說，則說指南車為周公所發明。但無論如何，以我們現代的眼光來看，似乎很難想像在上古時代，即有製造指南車的工藝水準，這是否意味著有「第一代文明」的存在呢？基本上我們避開第一代文明與第二代文明的爭議，單就正史而言，首造指南車者為東漢馬鈞，其後在南北朝、唐朝中葉，先後由祖沖之和金公立研造成功，但却都未留下任何描述。直到北宋時代，由燕肅和吳德仁所造的指南車，才在歷史上詳細記載下它的形狀和構造，其之的主要原理，即是和現今的差動齒輪原理相仿。而在近世——民國二十六年，王振鐸根據宋史上的記載仿造成功；1947年George Lanchester根據差動齒輪原理，成功

地製造出指南車；而在民國七十年，國立科學教育館，由中央大學劉天一教授領導，仿製George Lanchester的指南車，在「中國人的科技發明展」中公開展出。國立中山大學，機械系選修機械設計專題的一群同學，試著就自己所學去構想，重新製做指南車，藉由這個理念，實際體驗由一個原始構想、設計、製造、修改，以至於成品完成，整個過程中所遭遇的困難、問題，以及修改、解決的辦法。

二、設計原理

根據「宋史輿服志」上的記載，我們可以確知指南車係採用針齒輪（pin-gear）傳動，至於它的設計George Lanchester曾這麼解釋：指南車有兩個相同的車輪，若直線行駛，則兩個車輪走過相等的路程，若沿著一個固定圓心轉彎時，內外車輪行駛兩個同心圓弧，而外輪經過的圓弧較長，且知指南車轉彎的角度將和內外輪所走的距離差成正比。而若指南車轉彎時並不沿一定圓弧行走，那麼我們可以將每一小段行駛距離視為繞某一個圓心，因此，轉

* 國立中山大學機械系學生

** 國立中山大學機械系教授兼系主任

彎的角度仍與內外輪所走的距離差成正比。所以由此我們可以根據兩輪行駛的距離差，使車上的指標往回轉相同角度，即可達到“維持一定方向”的目的。

基於以上的概念，我們構想了兩組不同的設計，一是利用行星式齒輪，另一則是利用導螺桿，設計的原理和構想，分別詳述於後：

2-1 行星齒輪式

於此方法，我們構想了兩種設計，在介紹此兩種設計之前，先就其基本構造——行星式齒輪系，做一簡單的討論（見圖1）。令Sun

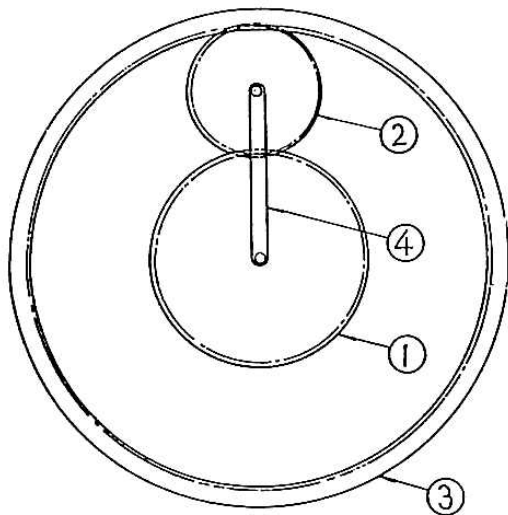


圖1 行星齒輪系

Gear, Planet Gear, Ring Gear 和 Planet arm 分別標註為 1、2、3 和 4。相對地，不同構件的半徑及角速度分別為 R_1 、 R_2 、 R_3 、 R_4 和 W_1 、 W_2 、 W_3 、 W_4 可知

Sun Gear 上 A 點的速度 $V_A = R_1 W_1$
 Planet arm 上 B 點的速度 $V_B = R_4 \cdot W_4 = (R_1 + R_2) W_4$
 Planet gear 上 A 點的速度 $\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B}$(1)
 Planet gear 上 C 點的速度 $\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{C/B} = R_3 W_2$(2)

因為 A 點和 C 點為反向運動，所以可知 $V_{C/B} =$

$$-\vec{V}_{A/B} \dots\dots\dots(3)$$

且 $\vec{V}_{A/B} = \vec{V}_A - \vec{V}_B \dots\dots\dots(4)$

$$\vec{V}_{C/B} = \vec{V}_C - \vec{V}_B \dots\dots\dots(5)$$

綜合(1)、(2)、(3)、(4)、(5)式代入(3)式我們可得

$$R_1 \cdot W_1 + R_3 \cdot W_3 = 2(R_1 + R_2) W_4 \dots\dots(6)$$

以下討論幾個特例：(N 代表齒數)

(i) Sun Gear 固定 ($W_1 = 0$)

$$SR = \frac{W_3}{W_4} = \frac{2(N_1 + N_2)}{N_3} = \frac{2(R_1 + R_2)}{R_3} \dots\dots\dots(7)$$

(ii) Planet arm 固定 ($W_4 = 0$)

$$SR = \frac{W_3}{W_1} = -\frac{N_1}{N_3} = -\frac{R_1}{R_3} \dots\dots\dots(8)$$

(iii) Ring Gear 固定 ($W_3 = 0$)

$$SR = \frac{W_4}{W_1} = \frac{N_1}{2(N_1 + N_2)} = \frac{R_1}{2(R_1 + R_2)} \dots\dots\dots(9)$$

以上即是行星齒輪系的分析，也就是下列兩種設計的基本機構。

A. 設計一（見圖2）

Gear 1 接至右輪

Gear 8 接至左輪

Gear 3 Gear 4 具放大作用，使 SUN gear 5 的轉速為 Ring Gear 8 的倍數。

Planet Gear 6, 7：傳動至 Gear 9

Gear 9 傳動至 Gear 10，再經兩相同大小齒輪 Gear 12、13 反向，作為指南車運動方向改變的補償，達到司南的目的。

以下我們分析此設計的運動情形及設定要求。

CASE 1 $W_{left} = W_{right}$ 則希望 Gear 10 不動，即 Planet Gear 固定 $\Rightarrow W_9 = 0$

$$W_8 = W_{left}, W_5 = W_{right} \cdot \frac{R_3}{R_4}$$

$$\frac{W_8}{W_5} = \frac{R_4}{R_3}, \text{ 選擇 } \frac{W_8}{W_5} = \frac{R_5}{R_9} = \frac{R_4}{R_3} \dots\dots(10)$$

CASE 2 左轉（見圖3）

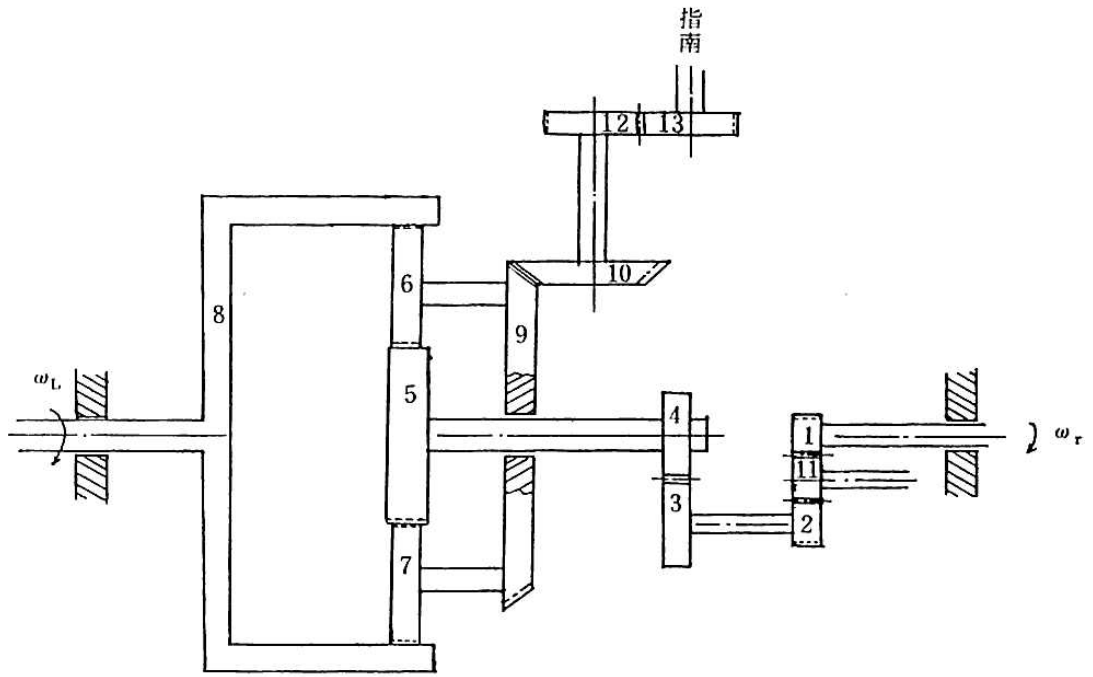


圖 2 指南車機構設計之一

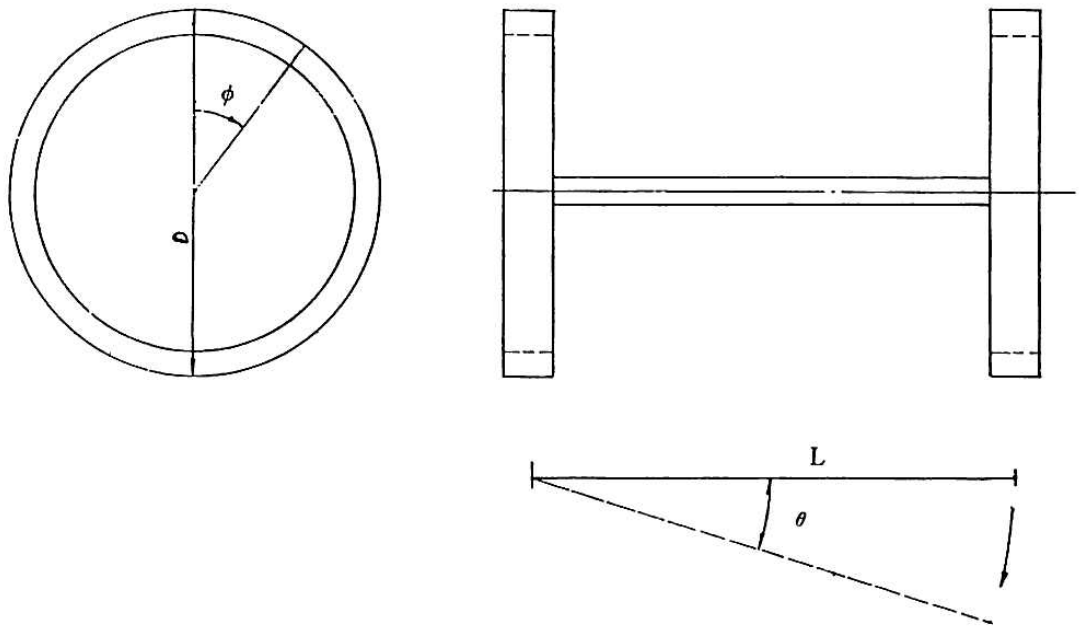


圖 3 指南車車身轉向

假設指南車轉向 W_θ ，且 $W_{left} = 0$ ，即
ring Gear 固定 ($W_8 = 0$)， $W_1 = W_\phi = \frac{2LW_\theta}{D}$

$$W_5 = \frac{R_3}{R_4} W_\phi \text{ 放大}$$

$$\frac{W_\theta}{W_5} = \frac{W_5}{2(R_5 + R_\theta)} = \frac{R_5}{2R_\theta}$$

$$\Rightarrow W_\theta = \frac{R_5 W_5}{2R_\theta}$$

指南車必須補償 $W_{10} = W_\theta$

$$\begin{aligned}
 R_9 W_9 &= R_{10} W_{10} \\
 \Rightarrow R_{10} &= \frac{R_5 W_5}{2R_9} = \frac{R_5}{2} W_5 \frac{2L}{W_9 D} = \frac{R_5 W_5 L}{W_9 D} \\
 &= \frac{R_5 W_5 L}{D} \left(\frac{R_3}{R_4 W_5} \right) = \frac{R_3 R_5 L}{R_4 D} \dots\dots(11)
 \end{aligned}$$

CASE 3 右轉

假設指南車轉向 W_θ ，且視 $W_{right} = 0$ ，即 Sun gear 固定 $W_5 = 0$

$$\Rightarrow \frac{W_8}{W_9} = \frac{2(R_5 + R_9)}{R_8} = \frac{2R_9}{R_8}$$

$$W_9 = \frac{W_8 R_8}{2R_9}$$

指南車必須獲得的補償 $W_{10} = W_\theta$

$$W_9 = W_\phi$$

$$R_9 W_9 = R_9 \frac{W_8 R_8}{2R_9} = R_{10} W_\theta$$

$$\text{且 } \frac{D}{2} W_8 = L W_\theta$$

$$\begin{aligned}
 R_{10} &= \frac{R_9 W_8}{2W_\theta} = \frac{R_9}{2} \left(\frac{2}{D} L W_\theta \right) \frac{1}{W_\theta} \\
 &= \frac{R_9 L}{D} \\
 &= \frac{R_3 R_5 L}{R_4 D} \dots\dots\dots(12)
 \end{aligned}$$

由以上三種狀況，可由(10)、(11)、(12)式得到此指南車的設計尺寸關係

$$\frac{R_5}{R_8} = \frac{R_4}{R_3} \text{ 及 } R_{10} = \frac{R_3 R_5 L}{R_4 D}$$

$$\text{亦即 } \frac{N_5}{N_8} = \frac{N_4}{N_3} \text{ 及 } N_{10} = \frac{N_3 N_5 L}{N_4 D}$$

B. 設計二 (見圖 4)

令 Sun Gear，Planet Gear，及 Planet Arm 分別為 1、2、3 及 4，右輪帶動的齒輪為 5，左輪帶動之齒輪為 6，齒數及角速度分別為 $N_1 \sim N_6$ ， $W_1 \sim W_6$ ， R 代表車輪半徑， L 代表兩輪間距。我們分三種狀況討論之。

CASE 1 當正向行駛時

$$\text{令 } W_4 = 0, \text{ 則 } \frac{W_3}{W_1} = -\frac{N_1}{N_3}$$

$$\text{而 } \frac{W_3}{W_6} = -\frac{N_6}{N_3}, \frac{W_1}{W_5} = \frac{N_5}{N_1},$$

$$\frac{W_3 \cdot W_5}{W_6 \cdot W_1} = -\frac{R_6 \cdot R_1}{R_3 \cdot R_5} = -\frac{N_6 \cdot N_1}{N_3 \cdot N_5}$$

$$W_5 = W_6, \text{ 令 } N_5 = N_1$$

$$\therefore \frac{W_3}{W_1} = -\frac{N_6}{N_3}, \text{ 令 } N_6 = N_1,$$

$$\text{則 } \frac{W_3}{W_1} = \frac{-N_1}{N_3}$$

CASE 2 當車子右轉時

視 $W_6 \neq 0$ ， $W_5 = W_1 = 0$

$$\text{則 } \frac{W_3}{W_4} = \frac{2(N_1 + N_2)}{N_8}$$

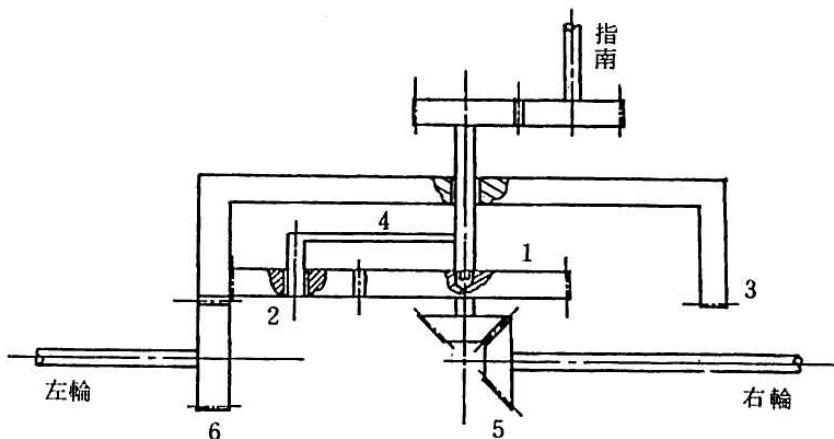


圖 4 指南車機構設計之二

$$\frac{W_3}{W_6} = -\frac{N_6}{N_3} \rightarrow W_3 = -\frac{N_6}{N_3} W_6$$

$$\therefore W_4 = \frac{N_3}{2(N_1+N_2)} \cdot \left(-\frac{N_6}{N_3}\right) \cdot W_6$$

$$\text{則 } W_4 = -\frac{N_6}{2(N_1+N_2)} \cdot W_6$$

$$\text{亦即 } \theta_4 = -\frac{N_6}{2(N_1+N_2)} \theta_6$$

CASE 3 當車子左轉時

視 $W_5 \approx 0$, $W_6 = W_3 = 0$

$$\text{則 } \frac{W_4}{W_1} = \frac{N_1}{2(N_1+N_2)}$$

$$\frac{W_1}{W_5} = \frac{N_5}{N_1} \rightarrow W_1 = \frac{N_5}{N_1} \cdot W_5$$

$$\therefore W_4 = \frac{N_1}{2(N_1+N_2)} \cdot \frac{N_5}{N_1} \cdot W_5$$

$$\rightarrow \theta_4 = \frac{N_5}{2(N_1+N_2)} \theta_5$$

綜合以上三狀況，考慮車身轉角 ϕ 與 θ_4 的關係：

右轉時： $L\phi = R\theta_6$

令 $\phi = \theta_4$

$$\text{則 } R = \left| -\frac{N_6}{2(N_1+N_2)} \right| \cdot L = \frac{N_6 \cdot L}{2(N_1+N_2)}$$

左轉時： $L\phi = R\theta_5$

令 $\phi = \theta_4$

$$\text{則 } R = \frac{N_5 \cdot L}{2(N_1+N_2)}$$

所以必須 $N_5 = N_6$ 始可
總和各設計要求尺寸關係，得

$$N_1 = N_5 = N_6$$

$$\text{及 } R = \frac{N_6 \cdot L}{2(N_1+N_2)}$$

參考尺寸：

選擇 $N_1 = N_2 = N_5 = N_6 = 20$

$N_3 = 60$

則得 $4R = L$

2-2 導螺桿式：（見圖5）

件一：導螺桿。

右端與右輪固死，隨右輪運動。

左端與左輪以軸承相接，不隨左輪轉動。

件二：螺帽。

右側圓盤上兩側有二小孔；左輪上連接兩長桿向右延伸，穿過件二之二小孔，帶動螺帽。

設 D ：車輪直徑。

P ：螺桿之 Pitch。

L ：兩車輪之間距。

θ_r ：右輪轉角。

θ_l ：左輪轉角。

分下列三種狀況考慮，

CASE 1 $\theta_r = \theta_l$ 。

兩輪等速運動，則件2滯留原處。

CASE 2 $\theta_r > \theta_l$ 。

則車子左轉，件2向右，設 S 為其移動距

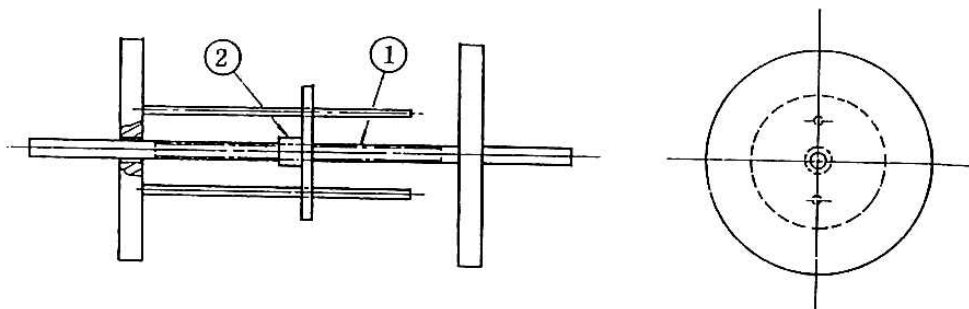


圖5 指南車機構設計之三

離，車身轉角為 ϕ

$$\rightarrow S = \frac{(\theta_r - \theta_l)}{2\pi} \cdot P \quad \text{向右}$$

$$L\phi = \frac{D}{2} (\theta_r - \theta_l)$$

$$\phi = \frac{D}{2L} (\theta_r - \theta_l) \quad \text{左轉}$$

CASE 3 $\theta_r < \theta_l$ 。

則車子右轉。

$$\rightarrow S = \frac{(\theta_l - \theta_r)}{2\pi} \cdot P \quad \text{向左}$$

$$\phi = \frac{D}{2L} (\theta_l - \theta_r) \quad \text{右轉}$$

由 CASE 2 及 CASE 3，我們可知件 2 移動距離 S 與車身實際轉角 ϕ 為一線性關係，

$$S = \frac{PL}{\pi D} \phi = C \cdot \phi \dots\dots\dots(13)$$

$$C = \frac{PL}{\pi D}, \text{ 爲一常數}$$

所以我們可得一結論：藉移動 S 爲輸入，將此線性運動轉換成圓周運動，且 $f(s) = -\phi$ ，則車身轉 ϕ 角後，函數 f 輸出爲 $-\phi$ 角，因此可獲得一系統永遠指向同一方向，此即爲指南車之功能。

但是如何將直線運動轉變到圓周運動？我們想到齒輪和齒條的相對運動。設計一齒條，其移動位移完全由件 2 控制，齒條置於中心軸前方，齒面背向件 2，則件 2 移動 S ，齒條亦隨之移動 S ，若有一齒輪與此齒條以一惰輪相對運動，則可由圖 5 觀察到：當車身向右轉 ϕ 角時，齒輪剛好向左轉，如果齒輪剛好也轉 ϕ 角，就達到函數 f 的要求。

設齒輪直徑爲 d ，轉角爲 φ （不計正負號計算），

$$\text{則 } S = \frac{d}{2} \varphi \dots\dots\dots(14)$$

$$(13) = (14) \rightarrow \frac{PL}{\pi D} \phi = \frac{d}{2} \varphi$$

設計要求， $\phi = \varphi$

$$\rightarrow d = \frac{2PL}{\pi D}$$

由(15)可知：一齒輪 $d = \frac{2PL}{\pi D}$ 即能合乎我們的設計要求。但事實上，我們不可能設計此齒輪，因爲螺桿的 Pitch 一般均很小，而軸距 L 亦不可太大，所以我們需要一齒輪組來放大。

假設放大 K 倍，則與齒條接觸的齒輪只需旋轉 $\frac{\varphi}{K}$ ($= \frac{\phi}{K}$)，即可達到我們的要求，則(15)式變爲

$$d = \frac{2P \cdot L \cdot K}{\pi D} \dots\dots\dots(16)$$

如此設計，我們就可以相當自如地控制 d 之大小了。

底下我們以一簡單的方塊圖來明示此設計。

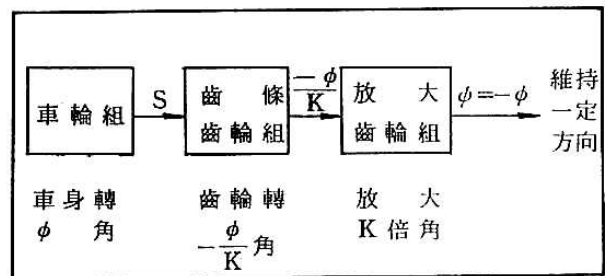


圖 6 螺桿式指南車方塊圖

三、模型製做及結論：

在整個指南車的製做過程中，困擾我們的並不是理論上的問題，而是在製造的要求上。老實說，在設計指南車的最初兩、三個禮拜內，基本的構想和原理早已規劃完成，而接下去的成品製做，却令我們耽延數月：歸咎其原因，一則是受限於本身的加工能力，另一則是限於財力——每部指南車之製做經費爲新台幣三

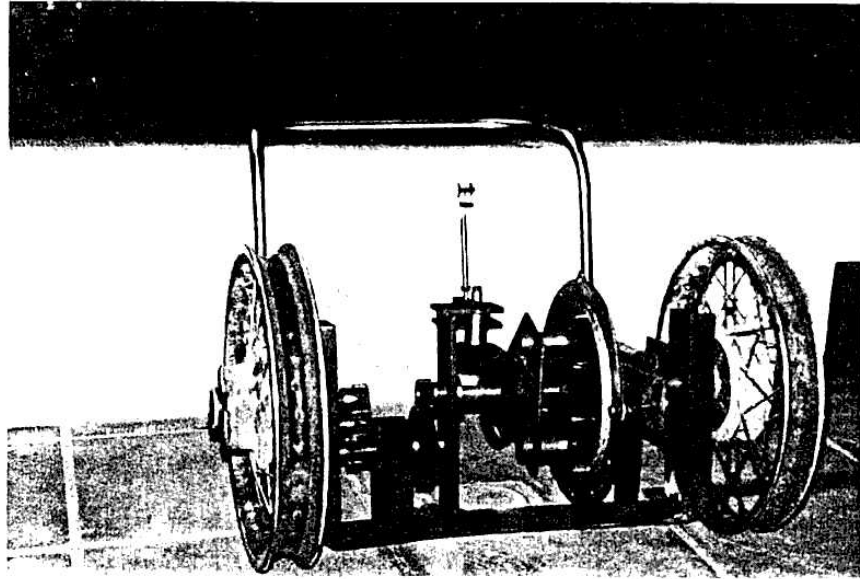


圖 7 指南車成品之一（行星式齒輪設計一）

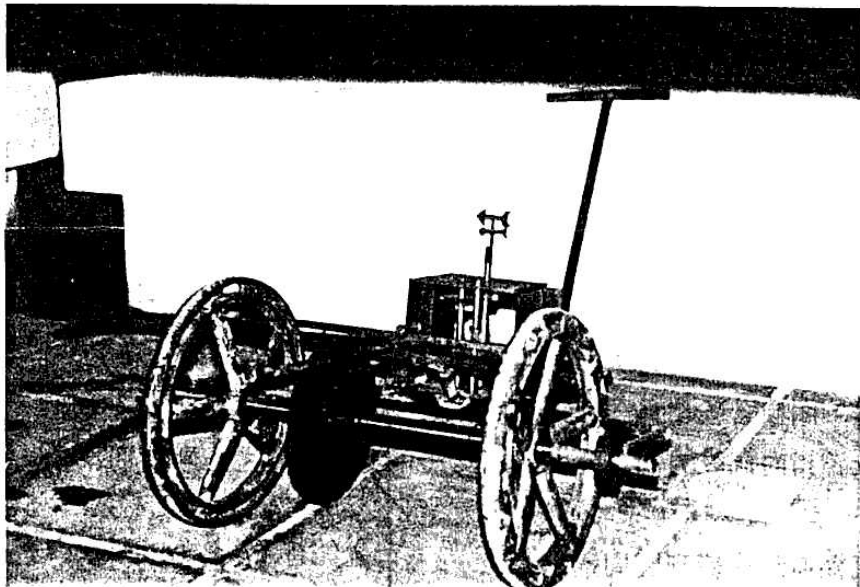


圖 8 指南車成品之二（螺桿式設計）

千元，因此幾乎所有的材料都是購自高雄公園路的拆船廢貨，因此尺寸的設計也就必須將就現成的零件，再加上自己動手的加工技術及精度之限制，其艱難也就可想而知了。雖然如此，我們仍然克服困難，完成了兩部指南車之原型，如圖 7、圖 8 所示。

當然由於上述種種之限制，在外形之美觀上，並未做太大之刻意表現；而在維持方向固定不變之精度，亦因加工精度及裝配間隙問題，而未達到十全十美之境界，但至少可以印證

上述所設計之指南車新機構原理是正確可行的。

參考文獻：

1. A.H. Soni : Mechanism Synthesis and Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York, 1974.
2. 科學月刊，第十二卷，第一期。